

Portfolio Optimization

روش‌های بهینه‌سازی سبد سهام (مقدماتی)

مدرس

علی رئوفی

دکتری اقتصاد مالی- پژوهشگر ارشد
پژوهشکده وزارت اقتصاد و دارایی



درباره دوره

بهینه‌سازی سبد (Portfolio Optimization) یا در یک تعریف کلی‌تر، تخصیص بهینه دارایی (Optimal Asset Allocation) یکی از مسائل مهم در حوزه علوم مالی و سرمایه‌گذاری است که کاربردهای فراوانی، در تصمیم‌گیری‌های مالی دارد. مبانی تئوری این مساله که با نام **نظریه نوین سبد دارایی** (Modern Portfolio Theory) شناخته می‌شود، در اوایل دهه ۱۹۵۰ میلادی، و توسط هری مارکویتز (Harry Markowitz) پایه ریزی شده است و بسیاری از دستاوردهای امروزی این شاخه از علوم مالی، مرهون تلاش‌ها و مطالعات وی است.

درباره دوره

- برای حل مساله بهینه‌سازی سبد دارایی، ابزارها و الگوریتم‌های متنوعی قابل استفاده است، که شامل الگوریتم‌های بهینه‌سازی کلاسیک و الگوریتم‌های بهینه‌سازی هوشمند و فراابتکاری است.
- آنچه که مارکویتز به عنوان نظریه نوین سبد دارایی مطرح کرد، استفاده از روش بهینه‌سازی کلاسیک بود که بعدها به واسطه پیدایش روش‌های بهینه‌سازی هوشمند و فراابتکاری توسعه یافت.
- در دوره مقدماتی، نظریه کلاسیک سبد دارایی و در دوره پیشرفته روش‌های فراابتکاری ارائه خواهد شد.

سرفصل‌های دوره

سبد دارایی چیست؟ / اهمیت و ضرورت تشکیل سبد دارایی / انواع سبد

آشنایی با انواع طبقات دارایی برای سرمایه‌گذاری

آشنایی با مساله بهینه‌سازی سبد و نظریه نوین سبد دارایی

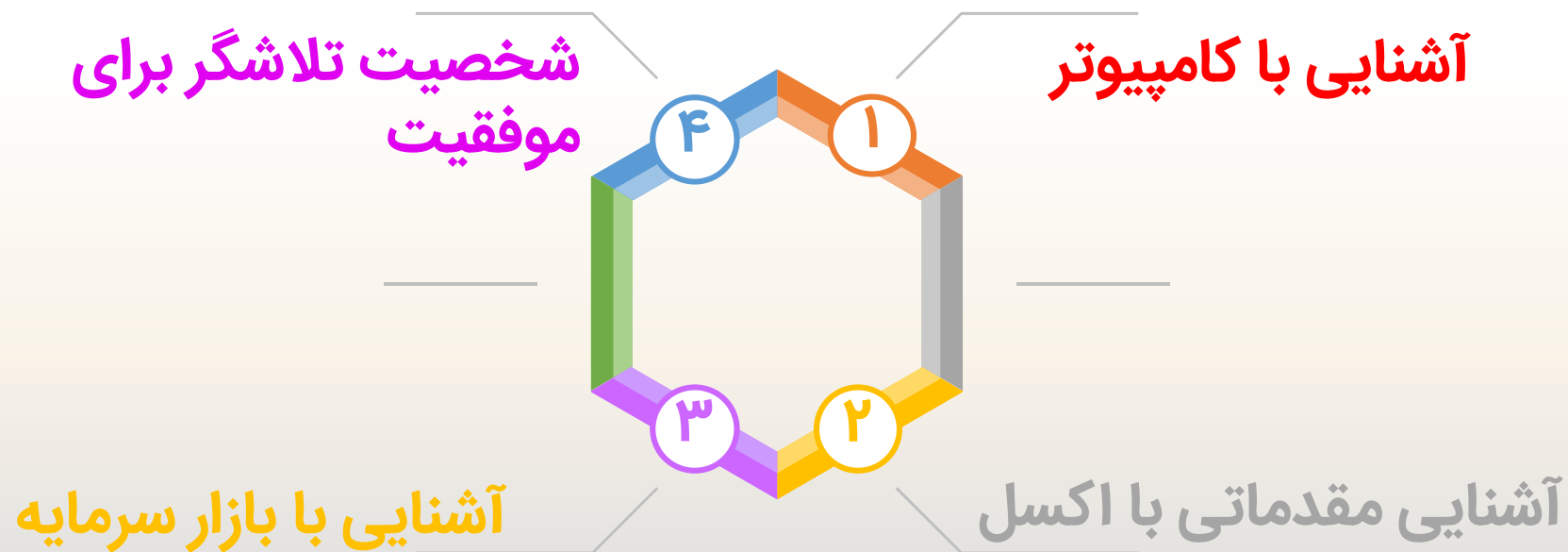
محاسبه بازده سهام و شناسایی سهام / صنعت پربازده

آشنایی و محاسبه سنج‌های ریسک (واریانس- نیم واریانس- Var - CVaR)

مدل مارکوویتز (مدل میانگین- واریانس) برای بهینه‌سازی سبد دارایی

استفاده از سایر معیارها، به عنوان سنج ریسک در مدل مارکوویتز

پیش‌نیازهای دوره



ابزارهای مورد استفاده

- پردازش داده‌ها
- بهینه سازی سبد کلاسیک

EXCEL

- محاسبه سنج‌های ریسک
- بهینه سازی سبد کلاسیک و هوشمند

MATLAB

- دریافت داده‌ها

TseClient

سبد دارایی چیست؟

- مجموعه دارایی‌های خریداری شده توسط افراد، **سبد دارایی** نامیده می‌شود.
- **تخصیص بهینه سبد دارایی یا پرتفو** عبارت است از تخصیص سرمایه به چندین دارایی - یا در حالت ساده چندین سهم مختلف - به نحوی که **ریسک سرمایه‌گذاری کاهش یابد**.
- تصور کنید که شما ۲۰ میلیون تومان برای سرمایه‌گذاری در بورس اختصاص می‌دهید و آن را بین چهار سهم مختلف تقسیم می‌کنید. در این حالت شما یک سبد دارایی شامل چند سهم تشکیل داده‌اید.

ضرورت تشکیل سبد دارایی

- در سپرده‌های بانکی، به صورت دستوری نرخى را تحت عنوان «سود سپرده» تعیین می‌کنند و تمامی بانک‌ها ناگزیر به پرداخت این سود هستند.
- از آنجایی که در بورس و بسیاری از دارایی‌های مالی، این **قطعیت در پرداخت سود وجود ندارد**، این امکان وجود دارد که با یک سرمایه‌گذاری اشتباه، فرد دچار زیان گردد. بنابراین اگر به درستی قوانین سرمایه‌گذاری رعایت نشود، این موضوع می‌تواند منجر به خرید دارایی نامناسب و زیان گردد.
- سبد دارایی که متکشل از چندین دارایی است روشی برای کنترل و **کاهش ریسک‌های سرمایه‌گذاری و مدیریت دارایی‌ها** است.

انواع سبد دارایی

- سبد دارایی می‌تواند براساس اهداف، انتظارات و میزان ریسک‌پذیری هر فرد متفاوت باشد.
- برای اینکه سبد بهینه تشکیل شود، ابتدا باید بدانید که از سرمایه‌گذاری خود چه هدفی را دنبال می‌کنید و مدت زمان سرمایه‌گذاری‌تان چقدر است. برای سرمایه‌گذاری کوتاه‌مدت یا بلندمدت استراتژی‌های معاملاتی می‌تواند متفاوت باشد.
- مواردی از قبیل سن، طول دوره سرمایه‌گذاری، شخصیت معاملاتی، استراتژی معاملاتی و ... می‌تواند بر نوع سبد سرمایه‌گذاری افراد تاثیر بگذارد.

انواع سبد دارایی



انواع سبد دارایی

سبد تهاجمی (Aggressive Portfolio)

- این سبد دارای **ریسک و بازدهی بالا** است. سرمایه‌گذارانی که ریسک‌پذیری زیادی دارند و به دنبال سودهای بالا هستند، سبدهای تهاجمی تشکیل می‌دهند و دارایی‌ها و سهام شرکت‌های با ریسک بالا را انتخاب می‌کنند (مانند کریپتوکارنسی‌ها، سهام شرکت‌های نوظهور مثل تسلا)
- این افراد با اینکه بازدهی بالایی از سبد خود دارند، **در صورت کاهش قیمت دارایی‌ها، زیان زیادی نیز متحمل می‌شوند.**

انواع سبد دارایی

سبد دفاعی (Defensive Portfolio)

- این سبد دارای ریسک سیستماتیک و نوسان کمی هستند. سبد دفاعی در زمان‌های خوب یا بد بازار، معمولاً خوب عمل می‌کنند. دارایی این سبد، معمولاً **اوراق با درآمد ثابت** یا **سهام متعلق به شرکت‌های تولیدی** است که محصولاتشان نیاز اساسی اقتصاد بوده و تقاضا برای محصولات آنها تقریباً ثابت و مشخص است؛ بنابراین با **نوسان اقتصاد دچار بحران نمی‌شوند**. برای تشکیل سبد سهام دفاعی، می‌توان سهام این‌گونه شرکت‌ها را از صنایع مختلف موجود در بازار خریداری کرد. لازم به ذکر است که سبد دفاعی دارای **ریسک و بازدهی کمی** خواهد بود.

انواع سبد دارایی

سبد درآمدی (Income Portfolio)

- این سبد دارای، **ریسک و بازدهی تقریباً ثابت و اندکی** در طول زمان دارد. این سبد بیشتر بر دارایی‌ها و سهام شرکت‌هایی تمرکز دارد که سود سالانه پرداخت می‌کنند؛ به عبارت دیگر، شرکت‌هایی که تصمیم می‌گیرند درصد بیشتری از سود خالص خود را به سهامداران پرداخت کنند. برخی از دارایی‌های سبد درآمدی می‌تواند با سبد دفاعی یکسان باشد. سبد درآمدی باید **همواره جریان نقدی مثبتی** برای سرمایه‌گذار داشته باشد.
- افرادی که به دنبال یک منبع درآمد بادوام و مطمئن هستند، می‌توانند اقدام به تشکیل این نوع سبد سهام نمایند.

انواع سبد دارایی

سبد سوداگرانه (Speculative Portfolio)

- سبدي با ريسک بسيار بالا است؛ به عبارتي دارايي‌هاي موجود در اين سبد عمدتاً متعلق به **سهام شرکت‌هاي پرريسک بوده که آینده مبهمی دارند** و در صورتی که شرایط شرکت خوب پیش رود، سود بالایی نصیب سرمایه‌گذاران می‌شود، در غیر این صورت زیان هنگفتی در انتظار سرمایه‌گذارانش است.
- شرکت‌هایی که در آستانه رشد خود هستند و یا اخباری خوش‌بینانه برای آن‌ها وجود دارد؛ از این‌گونه شرکت‌ها هستند.
- تشکیل سبد سهام سوداگرانه نیاز به تخصص و وقت بیشتری برای انتخاب و سرمایه‌گذاری در مقایسه با سایر سبدها دارد.

انواع سبد دارایی

سبد ترکیبی (Hybrid Portfolio)

- این سبد دارای **سود و بازدهی متغیر است**. این سبد ترکیب متنوعی از سهام شرکت‌های بورسی، صندوق‌های سرمایه‌گذاری، اوراق بدهی و است.
- دارایی‌های این سبد انعطاف‌پذیری بالاتری نسبت به سایر سبدها دارد.
- برای تشکیل این سبد، معمولاً از دارایی‌هایی استفاده شود که همبستگی منفی نسبت بهم داشته باشند. بدین معنی که اگر سهمی در یک بازه زمانی منفی است، روند سایر سهام و دارایی‌ها مثبت باشد.
- تنوع دارایی‌های این سبد از سایر سبدها بیشتر است.

ریسک چیست؟

- معمولاً زمانی که صحبت از ریسک به میان می‌آید، کلمه خطر برجسته می‌شود؛ اما باید بدانیم که ریسک در علوم مالی فقط در بردارنده خطر و مفهومی منفی (زیان) نیست. ریسک در معنای کلی، نااطمینانی از آینده را نشان می‌دهد. ممکن است ما خود را در معرض ریسک قرار دهیم و با فرصت‌های مثبت مواجه شویم. بنابراین ریسک می‌تواند منجر به نتایج مثبت و منفی شود.
- بنابراین می‌توان دو دسته ریسک خالص (Pure Risk) و ریسک سوداگرانه را تعریف نمود.

ریسک چیست؟

ریسک خالص (Pure Risk)

این ریسک‌ها در واقع به خطراتی اشاره دارند که عمدتاً در اختیار ما نیستند (صادف، بیماری، طلاق، بلایای طبیعی و ...) و در صورت وقوع، نتیجه‌ای جز خسارت ندارند. این ریسک‌ها عموماً قابلیت بیمه شدن دارند و همیشه موجب زیان می‌شوند.

ریسک سوداگرانه (Speculative Risk)

این نوع ریسک‌ها به مسائل مالی اشاره دارد و قابل اندازه‌گیری است و نتیجه احتمالی این ریسک، می‌تواند سود یا زیان باشد. انواع سرمایه‌گذاری‌های اقتصادی، بازی‌های مبتنی بر شرط‌بندی، از جمله چنین ریسک‌هایی هستند.

انواع ریسک‌های سرمایه‌گذاری

وقتی صحبت از ریسک در بازارهای مالی می‌کنیم در یک تقسیم‌بندی کلی با دو نوع ریسک اصلی رو به رو می‌شویم:

۱. **ریسک سیستماتیک (غیر قابل اجتناب) / Systematic Risk**
۲. **ریسک غیر سیستماتیک (قابل اجتناب) / Unsystematic Risk**

انواع ریسک‌های سرمایه‌گذاری

ریسک سیستماتیک (غیر قابل اجتناب) / **Systematic Risk**

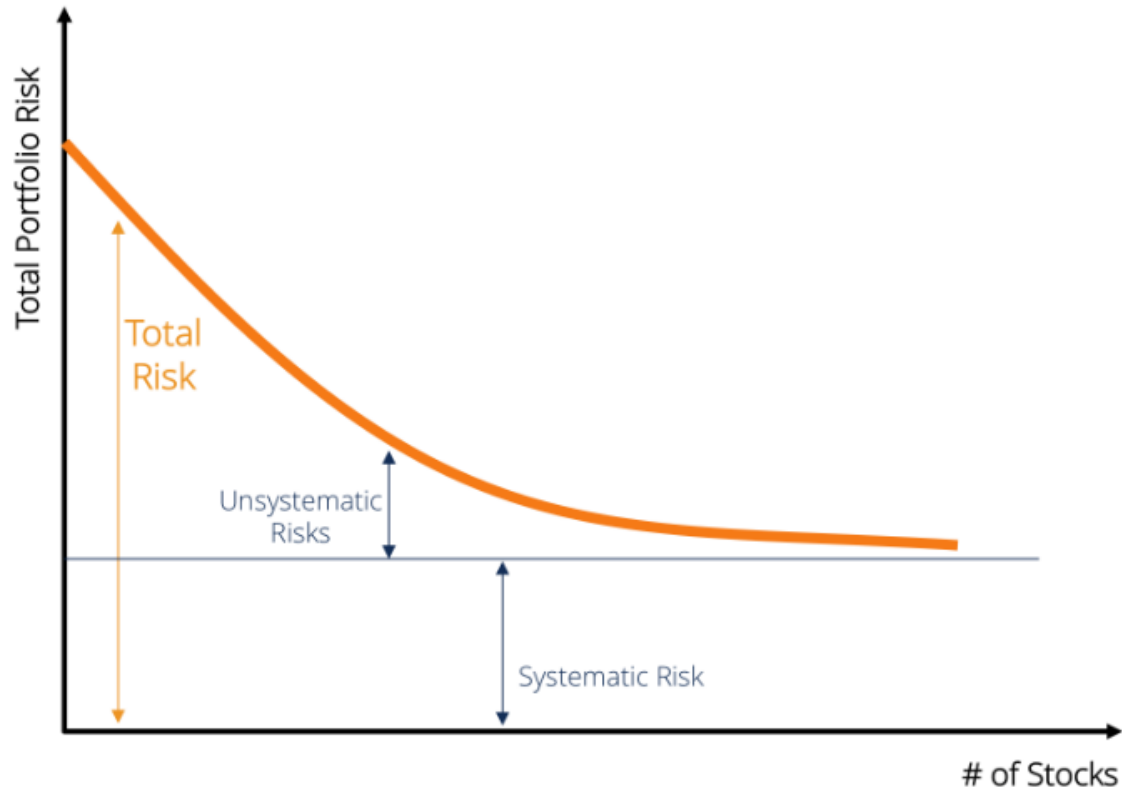
ریسک‌هایی که کنترل آنها در دست شما یا سرمایه‌گذاران نیست ریسک سیستماتیک یا غیر قابل اجتناب می‌نامند. این ریسک مرتبط با شرایط سیاسی و اقتصادی کلان کشور می‌باشد که قابل حذف نیست و به طور سیستماتیک بر کل بازار اثر می‌گذارد و محدود به صنعت خاصی نیست. از انواع این ریسک می‌توان به جنگ، تحریم‌های اقتصادی و سیاسی، نرخ بهره، تورم، نرخ ارز و ... اشاره کرد. در این نوع ریسک تفاوتی ندارد شما سبد سهام خود را از چه صنایعی انتخاب کرده باشید، تمامی صنایع زیان خواهند دید.

انواع ریسک‌های سرمایه‌گذاری

ریسک غیر سیستماتیک (قابل اجتناب) / **Unsystematic Risk**

ریسک غیر سیستماتیک را با نام قابل اجتناب نیز می‌شناسند که می‌توان با برخی روش‌های آن را اندازه‌گیری کرد و از آن اجتناب کرد. این ریسک منحصر برای شرکت یا صنعت خاصی می‌باشد که در آن سرمایه‌گذاری می‌کنید. به عنوان مثال تغییر در نرخ خوراک پتروشیمی‌ها یا تعرفه واردات قطعات. این تغییرات بر روی شرکت‌های وابسته تاثیر می‌گذارد. این ریسک را می‌توان از طریق متنوع سازی و تشکیل سبد سرمایه‌گذاری کاهش داد. در پرتفویی که به خوبی چیده شده باشد ریسک اینگونه موارد بسیار ناچیز است و فقط موارد سیستماتیک روی این پرتفو تاثیر می‌گذارند.

انواع ریسک‌های سرمایه‌گذاری



$$\text{Total Risk} = \text{Systematic Risk} + \text{Unsystematic Risk}$$

طبقه‌بندی افراد از نظر ریسک

سرمایه‌گذاران را از منظر پذیرش ریسک می‌توان به سه دسته تقسیم نمود:

افراد ریسک‌گریز: این افراد استراتژی محافظه‌کارانه دارند. یک شخص ریسک‌گریز ترجیح می‌دهد که بازده مطمئن بدست آورد و در حالتی که درصد احتمال بالای موفقیت مطرح باشد شرکت خواهد کرد.


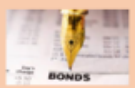



افراد ریسک‌پذیر: این افراد استراتژی جسورانه دارند و شخص در این حالت خواهان پذیرش ریسک است و تمایل دارد شانس خود را بیازماید.

افراد ریسک‌خنثی: سومین گروه افرادی هستند که به اصطلاح آن‌ها را ریسک‌خنثی می‌نامند. این افراد ارزش پولی را مقدار ارزش اسمی آن می‌دانند.

انواع طبقات دارایی (Asset Class)

- طبقه دارایی به گروهی از سرمایه‌گذاری‌ها گفته می‌شود که ویژگی‌های مشابهی دارند و تا حدودی تحت قوانین و مقررات یکسانی قرار دارند. این مساله باعث می‌شود تا دارایی‌های این طبقه در بازار رفتار نسبتاً مشابهی داشته باشند.
- به صورت سنتی طبقات دارایی به **۳ طبقه اصلی سهام (Stock)**، **اوراق با درآمد ثابت (Bonds)** و **پول نقد یا معادل آن (Cash Equivalent)** تقسیم‌بندی می‌شود.
- امروز طبقات دارایی گسترش یافته و دارایی‌های جدید با عنوان **سرمایه‌گذاری‌های جایگزین (Alternative Investments)** افزوده شده است.

انواع طبقات دارایی (Asset Class)

Ability and liquidity to buy anything	Lending money to someone	Ownership of physical space	Ownership of business	Ownership of goods with end use
CASH 	FIXED INCOME 	REAL ESTATE 	EQUITY 	COMMODITIES 
Hard cash Liquid funds Savings accounts Online wallets	Fixed Deposits Recurring Deposits Bonds Debentures Debt mutual funds Endowment policies	Land plots Residential property Commercial property REIT Real Estate Mutual Fund	Stocks Startup funding ETF Index funds Equity mutual funds	Gold (physical) Silver (physical) Gold or Silver ETF Gold or Silver mutual fund Crude oil Wheat Corn

Portfolio Optimization

روش‌های بهینه‌سازی سبد سهام (مقدماتی)

مدرس

علی رئوفی

دکتری اقتصاد مالی- پژوهشگر ارشد
پژوهشکده وزارت اقتصاد و دارایی



انواع طبقات دارایی (Asset Class)

- طبقه دارایی به گروهی از سرمایه‌گذاری‌ها گفته می‌شود که ویژگی‌های مشابهی دارند و تا حدودی تحت قوانین و مقررات یکسانی قرار دارند. این مساله باعث می‌شود تا دارایی‌های این طبقه در بازار رفتار نسبتاً مشابهی داشته باشند.
- به صورت سنتی طبقات دارایی به **۳ طبقه اصلی سهام (Stock)**، **اوراق با درآمد ثابت (Bonds)** و **پول نقد یا معادل آن (Cash Equivalent)** تقسیم‌بندی می‌شود.
- امروز طبقات دارایی گسترش یافته و دارایی‌های جدید با عنوان **سرمایه‌گذاری‌های جایگزین (Alternative Investments)** افزوده شده است.

انتخاب سبد دارایی بر اساس مدل میانگین- واریانس

Portfolio Optimization

Modern portfolio theory

مفاهیم ابتدایی

کل سرمایه یا بودجه: X

۱۰۰۰ T

سه فایده‌ای که به دارایی‌ها اختصاص داده شده است $x_i =$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 500 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = X \rightarrow 500 + 200 + 300 = 1000$$

$$w_i = \frac{x_i}{X}$$

↓
 توزیع سهامی
 نسبی

$w_1 = \frac{500}{1000} = 0.5$
 $w_2 = \frac{200}{1000} = 0.2$
 $w_3 = \frac{300}{1000} = 0.3$

$$0 \leq w_i < 1 \quad , \quad \sum w_i = 1$$

برابر داران یکسری زمانی داریم.

$t = 1, 2, 3, \dots, T$
 $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$t = 1390, 1391, \dots, 1399$
 $i = 1, 2, 3$

$P_i(t) \rightarrow$ قیمت دارایی i در زمان t

	X_1	X_2	X_3
1390	100	51	122
1391	103	52	140
1392	110	60	128
1393	109	52	140
⋮	⋮	⋮	⋮
1399	12	180	151

بازده دارایی

$$r_i(t) = \frac{P_i(t) - P_i(t-1)}{P_i(t-1)}$$

بازده حسابی

$$= \frac{P(t)}{P(t-1)} - 1$$

$$r_1(1391) = \frac{103 - 100}{100} = 3\%$$

	x_1	x_4	x_3
۱۳۹۰	۱۰۰	۵۸	۱۲۲
۱۳۹۱	۱۰۳	۵۳	۱۴۰
۱۳۹۲	۱۱۰	۶۰	۱۳۸
۱۳۹۳	۱۰۹	۵۳	۱۴۰
⋮	⋮	⋮	⋮
۱۳۹۴	۱۲	۸۰	۱۵۸

بازده دارایی

$$r_i(t) = \frac{\log(P_i(t))}{\log(P_i(t-1))}$$

بازده گسسته

$$= \frac{\log(P_i(1393))}{\log(P_i(1390))}$$

	x_1	x_4	x_3
1390	100	51	122
1391	103	53	140
1392	110	60	128
1393	109	53	140
⋮	⋮	⋮	⋮
1394	12	80	151

۱) ۱۰۰۰ → ۱۰۲۰ → $\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} = \frac{20}{1000} = 2\%$

۲) ۱۰۰ → ۱۲۰ → $\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} = \frac{20}{100} = 20\%$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$

$(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n)$

در سبد بهینه ریسک سبد ایران وینچ بی
مناسب بر ار n دای مختلف هستیم

Max بازده سپد دارایی
در حالی که
Min ریسک سپد

	r
۱۲۸.	۱۲
۱۲۹.	۱۵
۱	-۱۲
	۱

$\left. \right\} \frac{1}{T} \sum r$

برای هر دارایی ← بازده انتظاری

$$E(R_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R(t) = \tilde{r}_i \rightarrow \text{بازده انتظاری}$$

نصراً کنند که در راسی داریم که فنک این سه دارایی

به ترتیب (۲ و ۱ و ۰) است و بازده این

۱ = ۱۰٪ و ۱ = ۱۰٪

سه دارایی به ترتیب (۱۵ ، ۱۰ ، ۲) است

$$\frac{20 + 10 + 15}{3} = 15 \rightarrow \text{مخلوط}$$

میانگین وزنی

۲۰	۳
۱۵	۲
۱۰	۳

$$\frac{(3 \times 20) + (2 \times 15) + (3 \times 10)}{3 + 2 + 3}$$

بازده سبد سهام

$$\mu_p = E(R_{P_i}) = \frac{\sum \omega_i \tilde{r}_i}{\sum \omega_i = 1} = \sum \omega_i \tilde{r}_i$$

$$= \omega_1 \tilde{r}_1 + \omega_2 \tilde{r}_2 + \dots + \omega_n \tilde{r}_n$$

$$\mu_p = \omega^T \tilde{r}$$

$$\begin{matrix}
 \underbrace{\hspace{10em}}_n \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 \left[\omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_n \right]_{1 \times n} \times \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \left[\quad \right]_{1 \times 1} \\
 \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \dots + \omega_n r_n
 \end{matrix}$$

$$r_p = \omega^T \cdot r_i$$

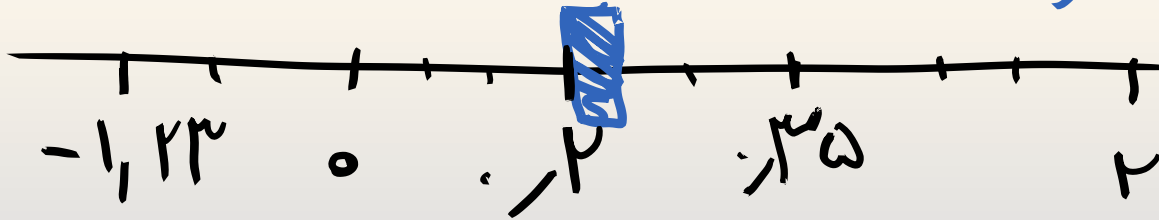
بازده انتظاری

$$\sum (r_i - \tilde{r}_i) = (r_1 - \tilde{r}_1) + (r_2 - \tilde{r}_2) + (r_3 - \tilde{r}_3) = 0$$

1	۲
۲	۳
۳	۴
\bar{r}	

$$\tilde{r}_i = 2$$

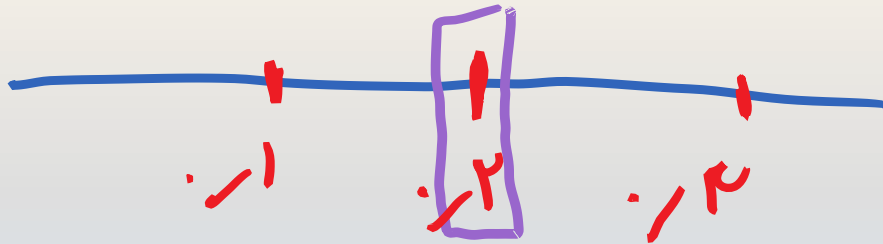
$$E(R_i) = \tilde{r}_i$$



$$\sum (r_i - \tilde{r}_i) = \underbrace{(r_1 - r_2)}_{-1} + \underbrace{(r_2 - r_2)}_0 + \underbrace{(r_3 - r_1)}_{+1} = 0$$

r_1
r_2
r_2
r_3

میزان r_2



$$\sum (r_i - \hat{r}_i)^2 = \underbrace{(r_1 - \hat{r}_1)^2}_{= 1} + \underbrace{(r_2 - \hat{r}_2)^2}_{= 1} + \underbrace{(r_3 - \hat{r}_3)^2}_{= 1}$$

= ۳

$$\sum |r_i - \hat{r}_i| = |r_1 - \hat{r}_1| + |r_2 - \hat{r}_2| + |r_3 - \hat{r}_3|$$

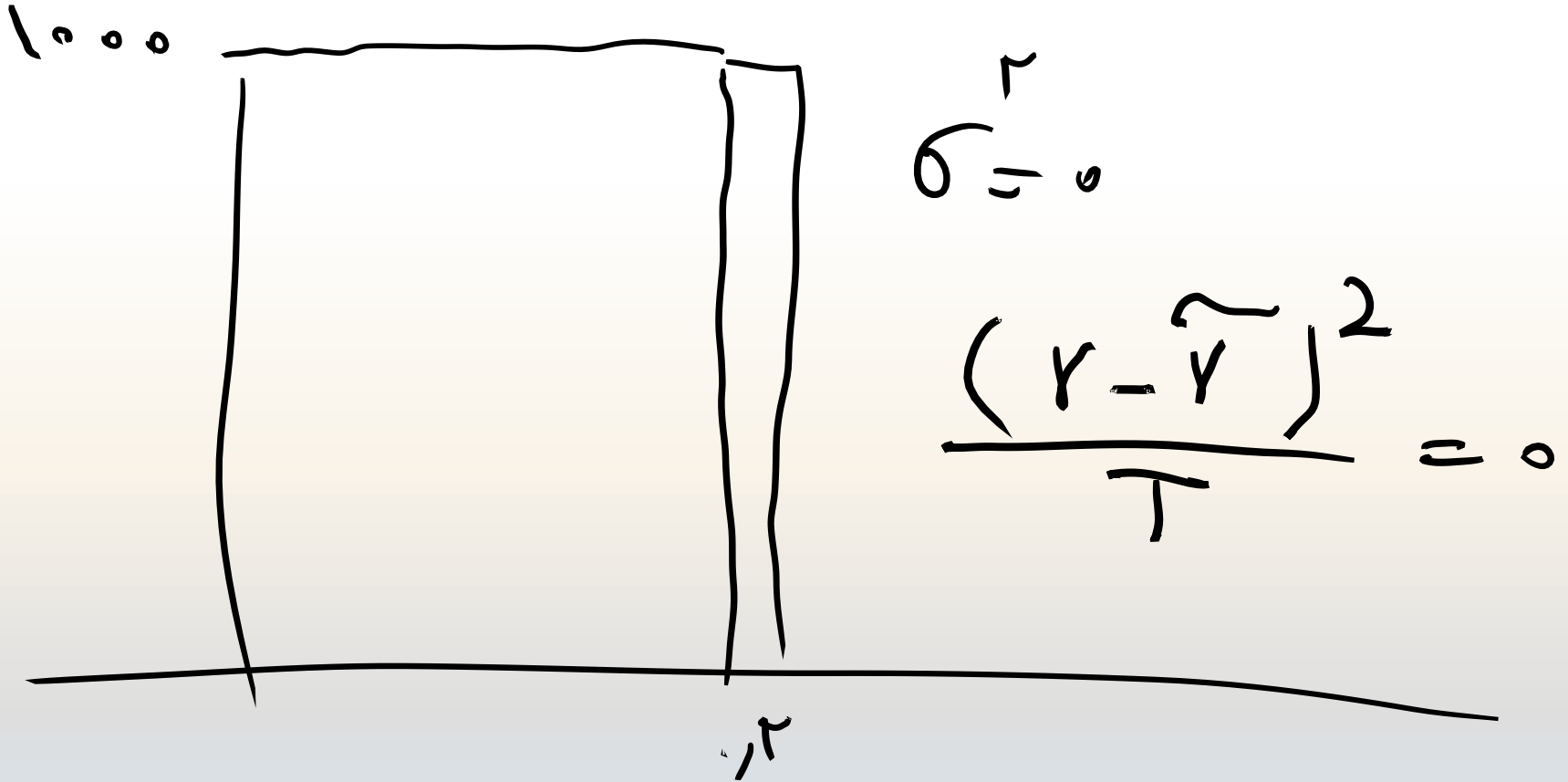
= ۳

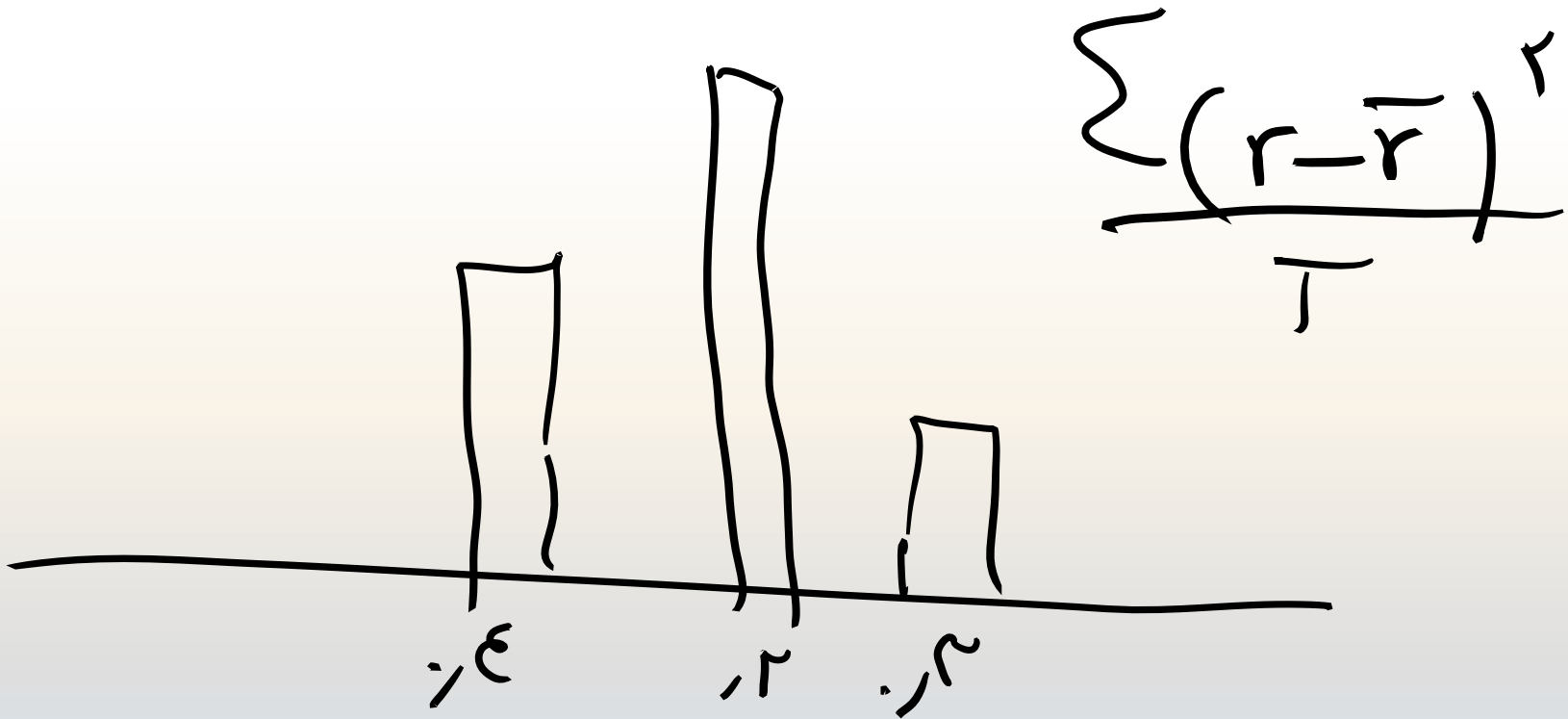
$$(r_i - \tilde{r})^2$$

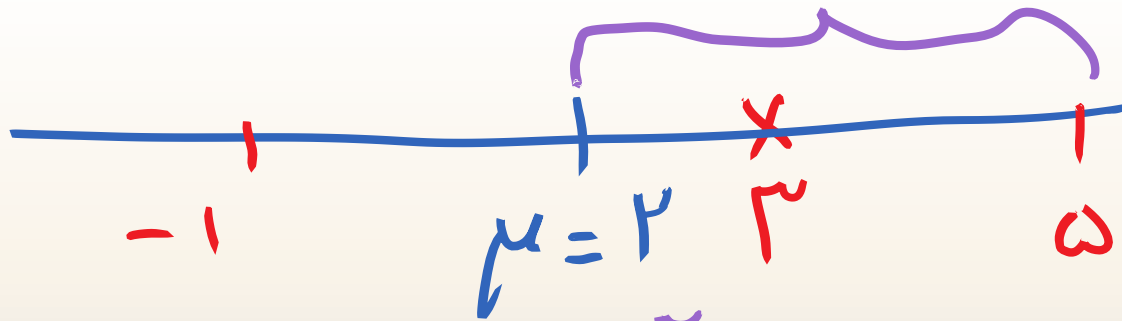
Variance = $\frac{\sum (r_i - \tilde{r}_i)^2}{T} = \sigma^2$

Standard Deviation = $S_t = \sqrt{\sigma^2}$

MAD = $\frac{\sum |r_i - \tilde{r}_i|}{T}$



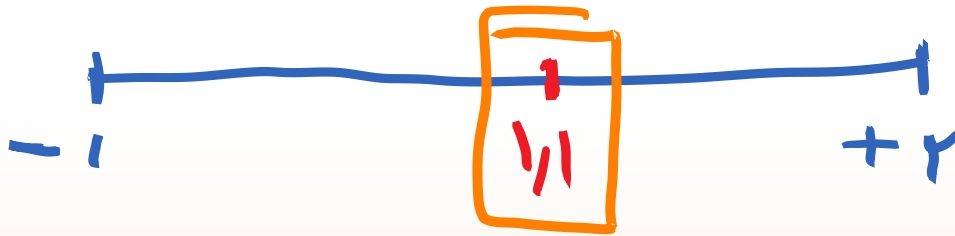




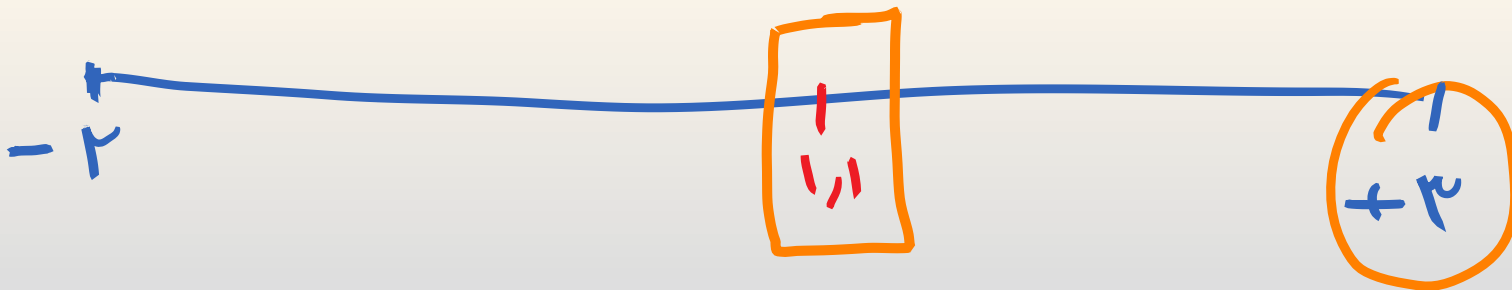
$$MAD = |3 - 2| + |5 - 2| + |-1 - 2| =$$

$$\sigma^2 = \underbrace{(3 - 2)^2} + \underbrace{(5 - 2)^2}$$

ایران خودرو



فولاد



$$\text{Var}(\mu_p) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \omega_i \tilde{r}_i\right)$$

مربع‌گسسته فقط ۲

$$= \text{Var}(\omega_1 \tilde{r}_1 + \omega_2 \tilde{r}_2)$$

داریم

$$\text{Var}(\mu_p) = \omega_1^2 \text{Var}(\tilde{r}_1) + \omega_2^2 \text{Var}(\tilde{r}_2) +$$

$$2\omega_1\omega_2 \text{Cov}(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$$

پیش‌ساز ریاضی

$$\text{Var}(X_t) = \sigma^2 \rightarrow \text{Var}(\alpha X_t) = \alpha^2 \sigma^2$$

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2)$$

$$= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\text{Cov}(X_1, X_2)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\alpha X_1 + \beta X_2) &= \\ &= \alpha^2 \text{Var}(X_1) + \beta^2 \text{Var}(X_2) + 2\alpha\beta \text{Cov}(X_1, X_2) \\ &= \alpha^2 \sigma_1^2 + \beta^2 \sigma_2^2 + 2\alpha\beta \text{Cov}(X_1, X_2) \end{aligned}$$

Covariance

کواریانس

ارتباط ۱- منفی را با هم می سنجید

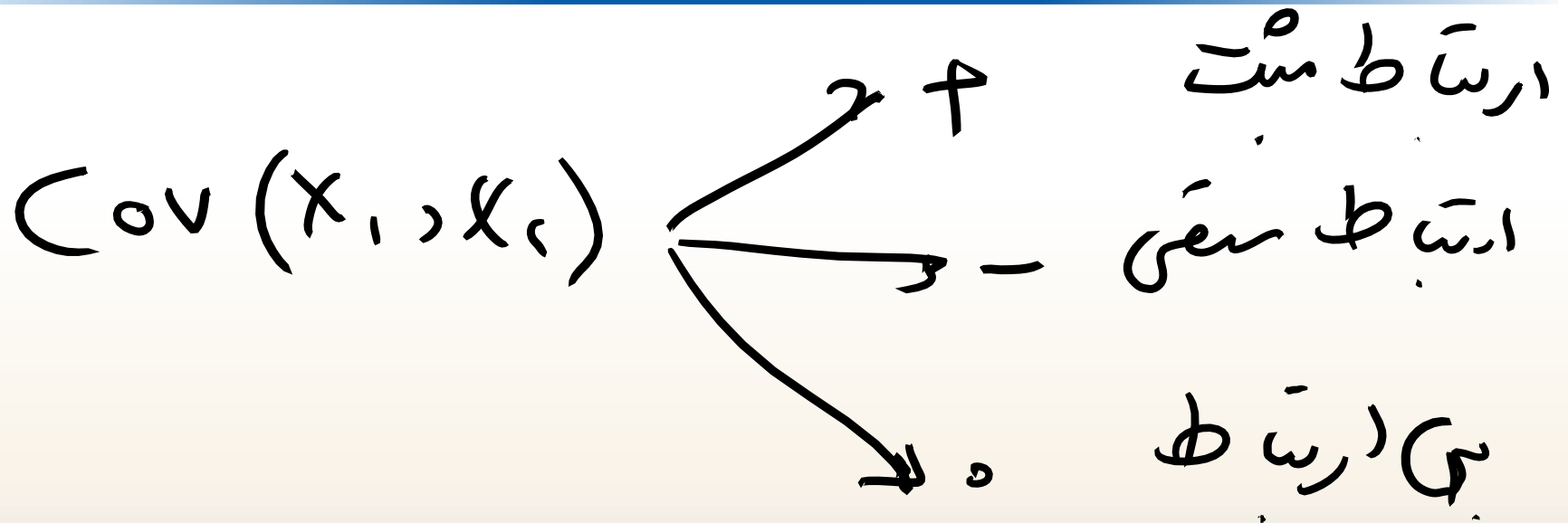
۱) ارتباط مثبت دارند

۲) ارتباط منفی دارند

۳) ارتباطی ندارند

$$\text{Cov}(x_1, x_2) =$$

$$\frac{\sum (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)}{T}$$



ضریب همبستگی

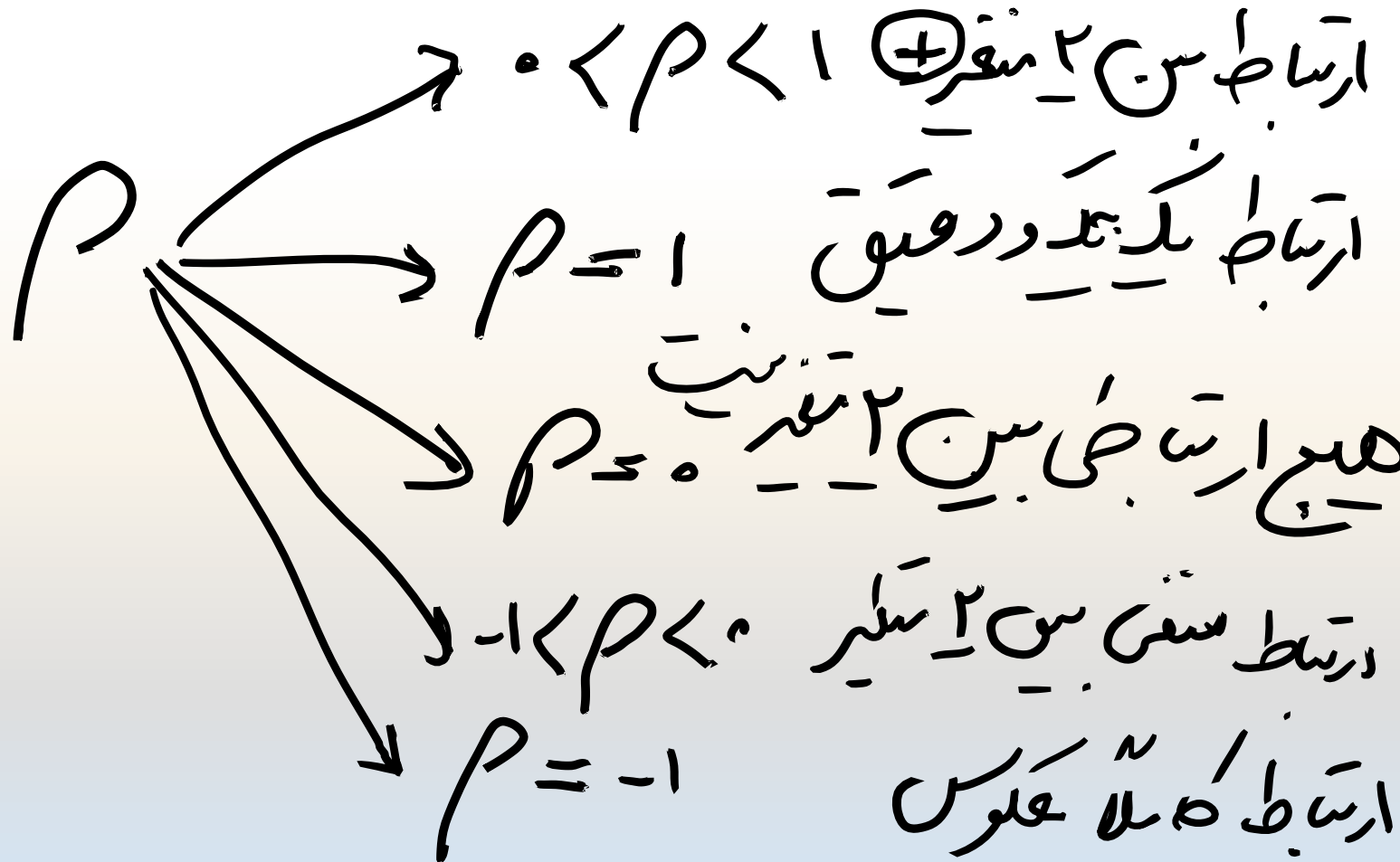
$$\rho_{x_1, x_2} = \frac{\text{Cov}(x_1, x_2)}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}}$$

$$-1 < \rho_{x_1, x_2} < 1$$

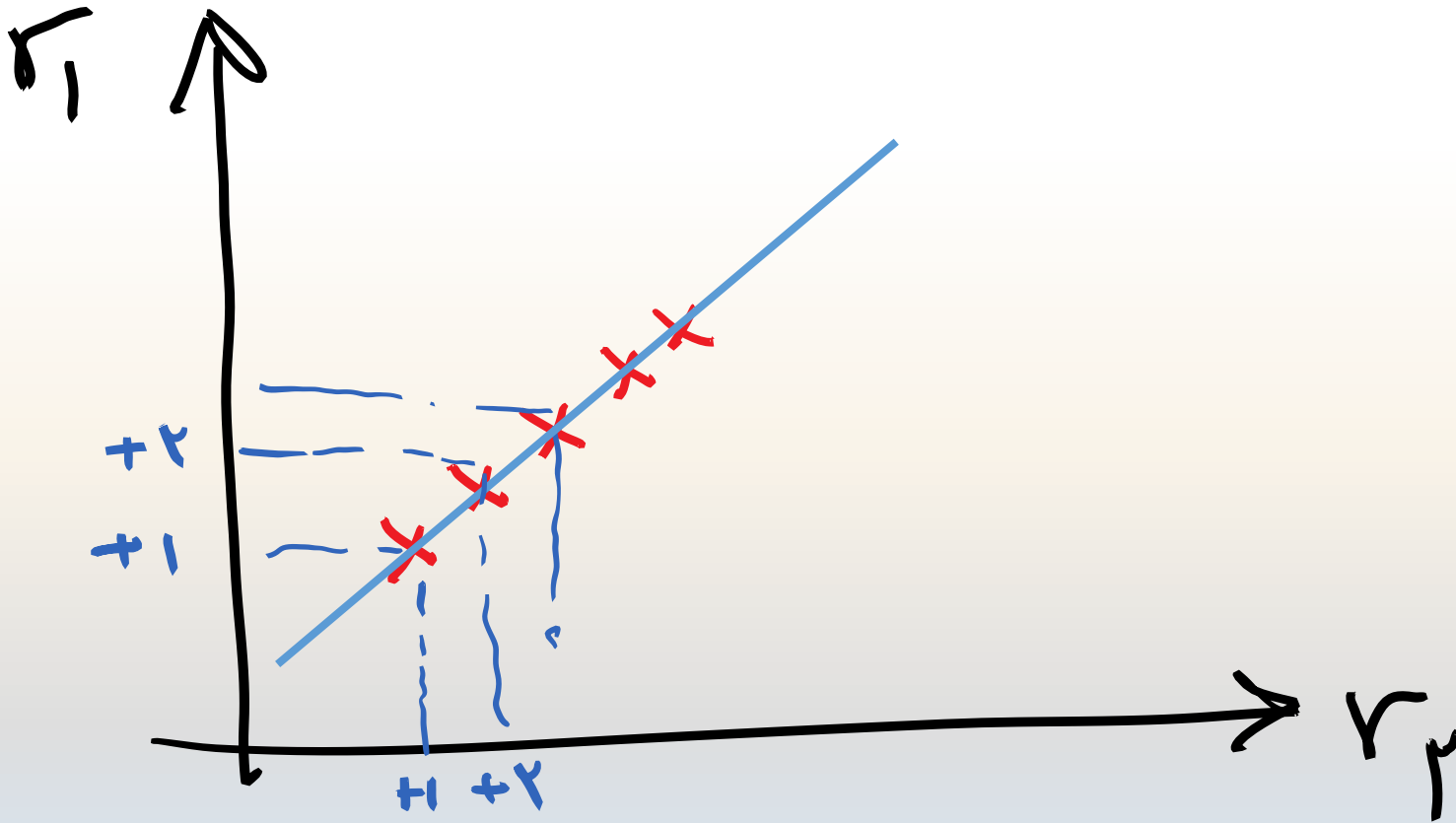
$$\sigma^2 = \sqrt{\sigma^2} \quad \text{انحراف معیار}$$

$$\text{Cov}(x_1, x_2) =$$

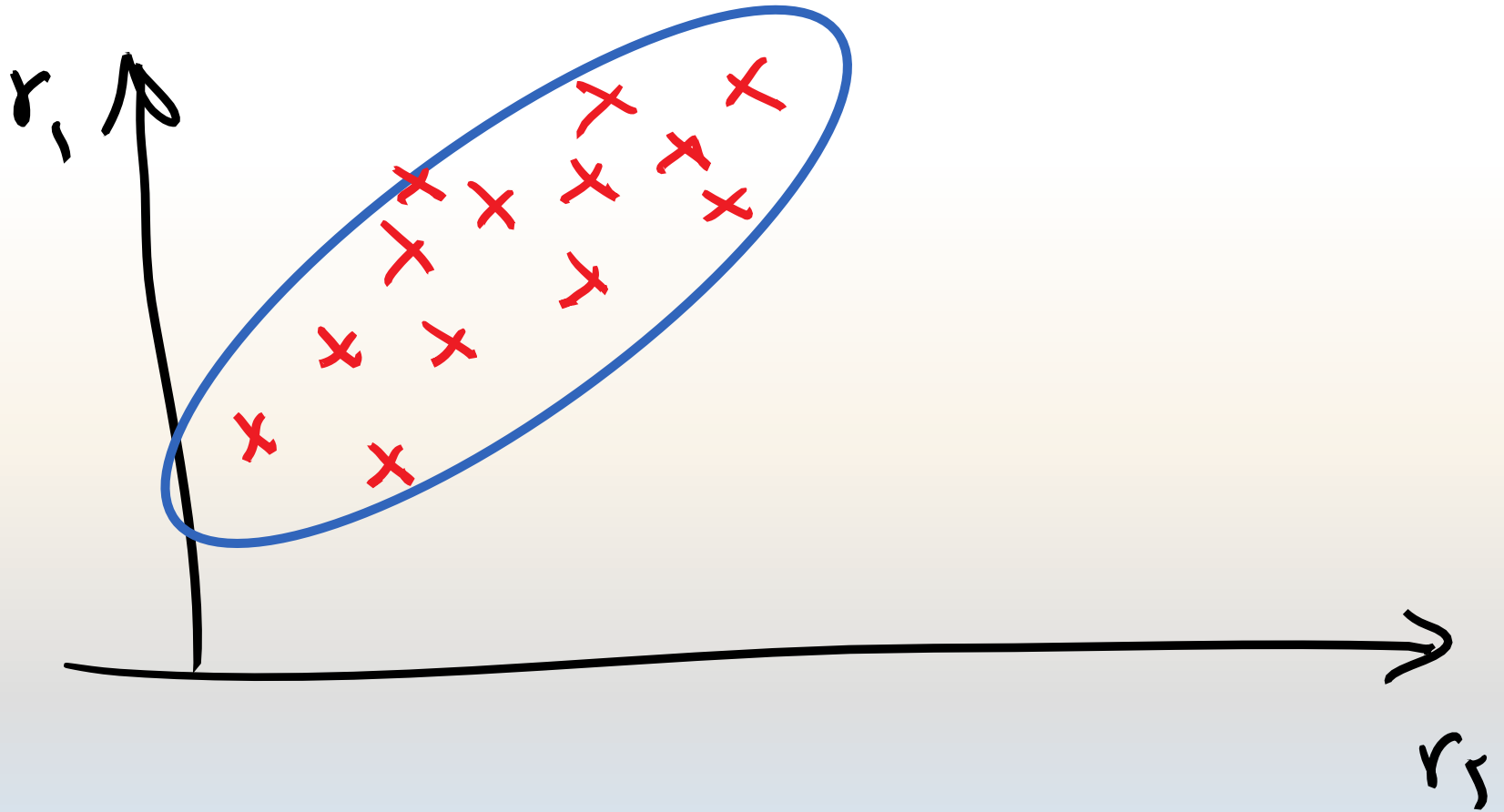
$$\rho_{x_1, x_2} \cdot \sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}$$



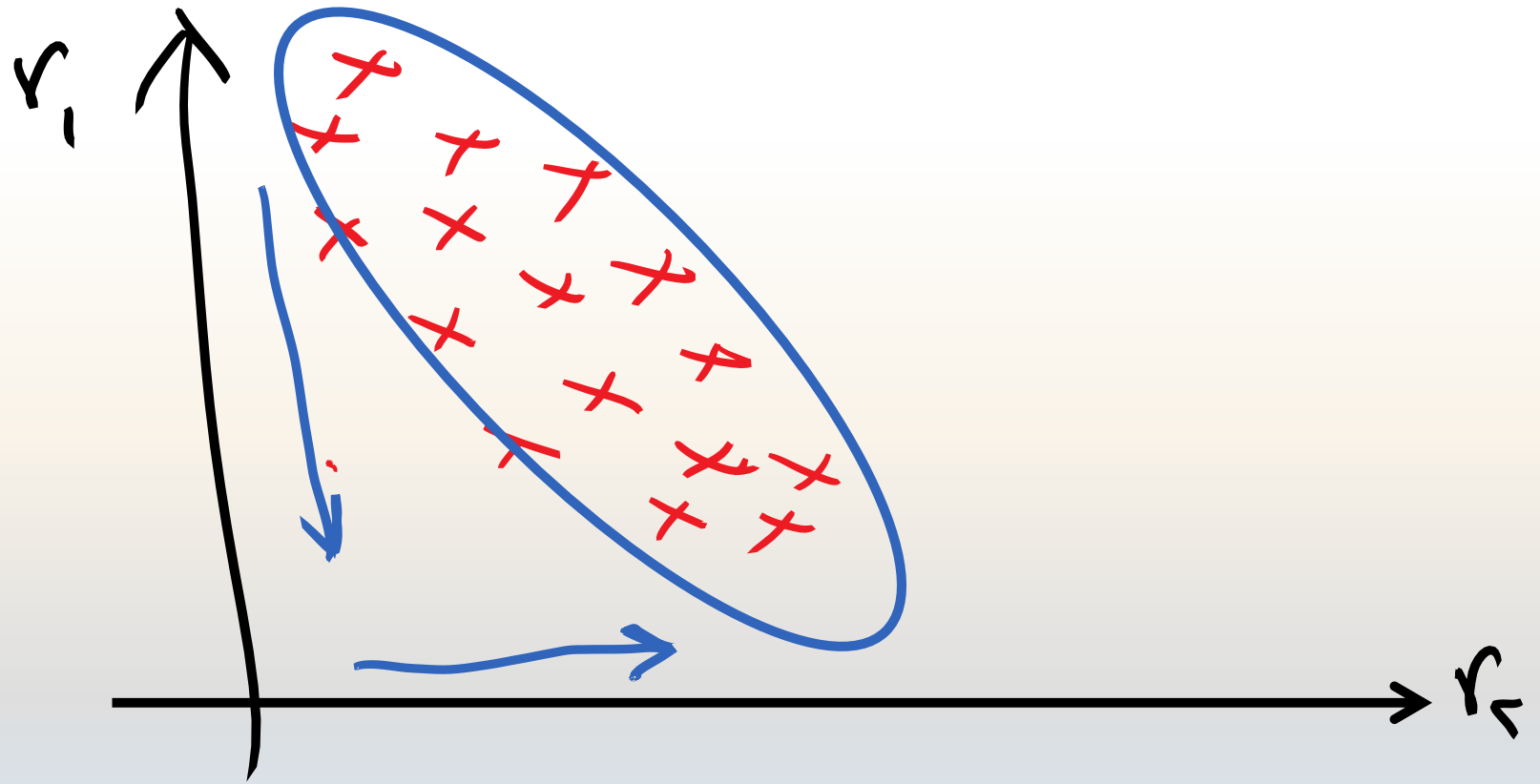
$$\rho = 1$$



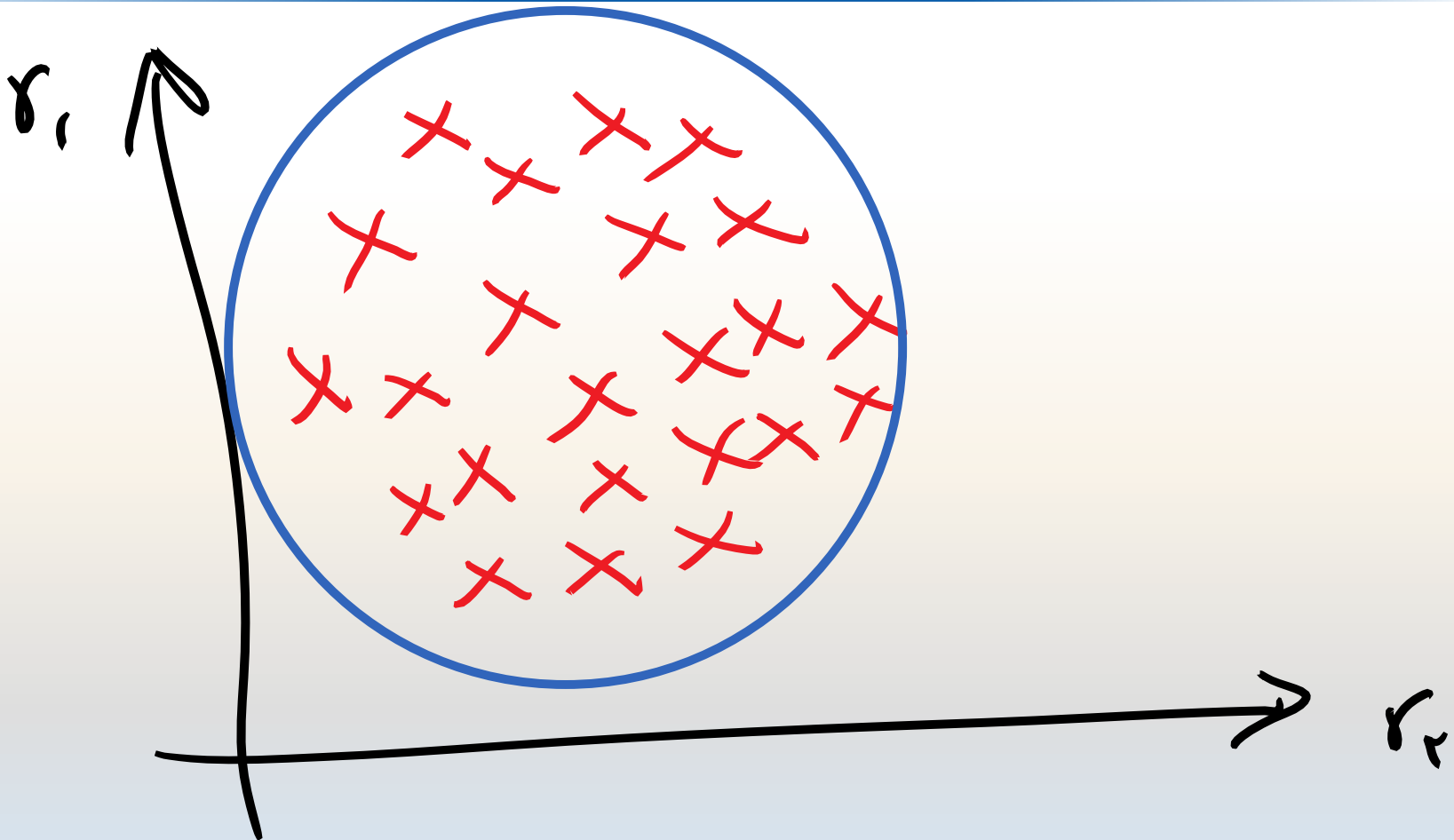
$0 < \rho < 1$



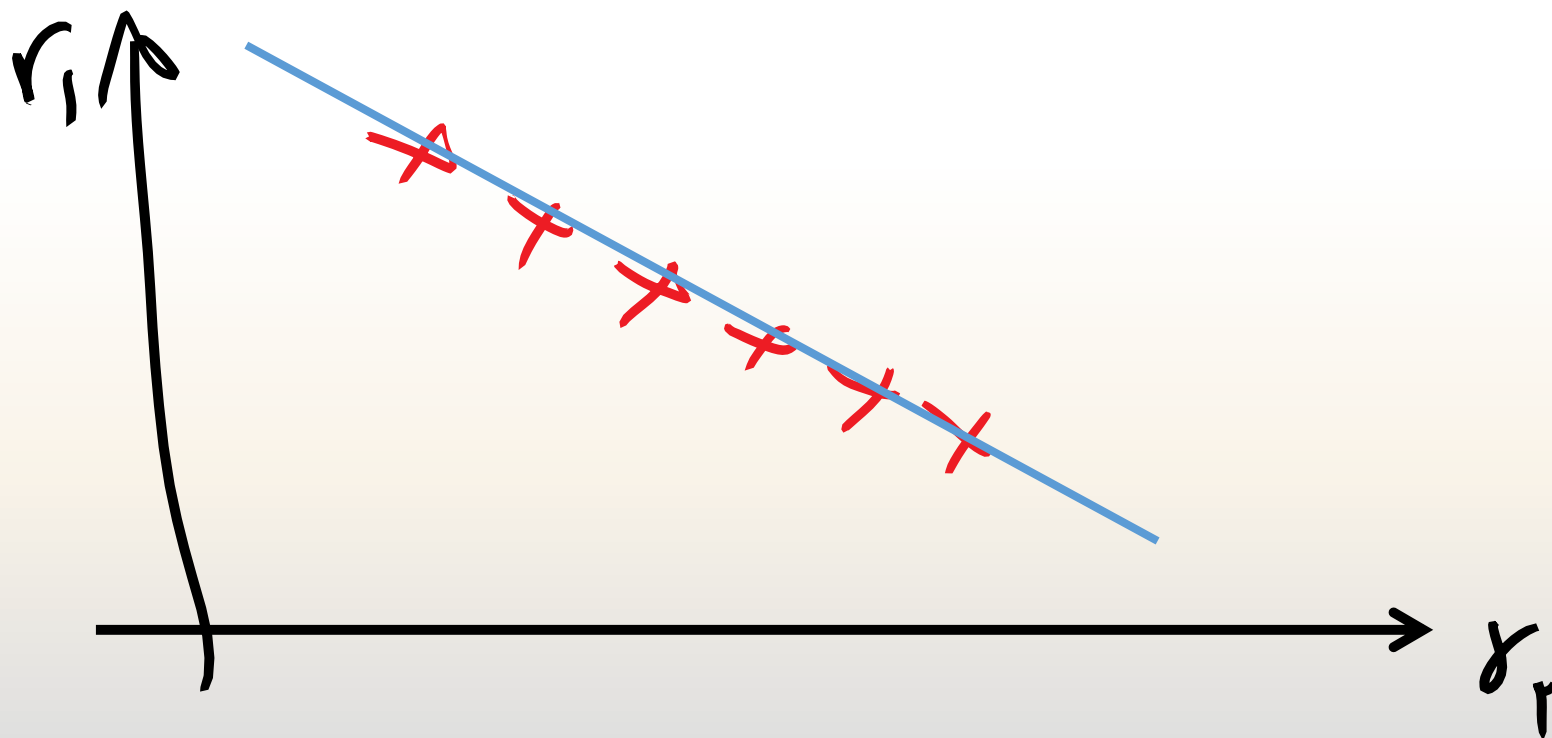
۰ < ρ < ۱ -



$$\rho = 0$$



$$\rho = -1$$



$$\text{Var}(\mu_P) = \omega_1^2 \text{Var}(\tilde{r}_1) + \omega_2^2 \text{Var}(\tilde{r}_2) + 2\omega_1\omega_2 \text{Cov}(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$$

$$\underbrace{\rho_{r_1, r_2} \sigma_{r_1} \cdot \sigma_{r_2}}$$

$$\text{Var}(\mu_P) = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2$$

مسئله

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2} \quad / \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \quad / \quad \rho_{12} = 1$$

$$\text{Var}(\mu_p) = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sigma^2$$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 = \sigma^2$$

مسئله

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2} \quad / \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \quad / \quad \rho = 0$$

$$\text{Var}(\mu_p) = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\rho\sigma_1\sigma_2$$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2$$

$$\sigma_p = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sigma = \sigma$$

مسئله

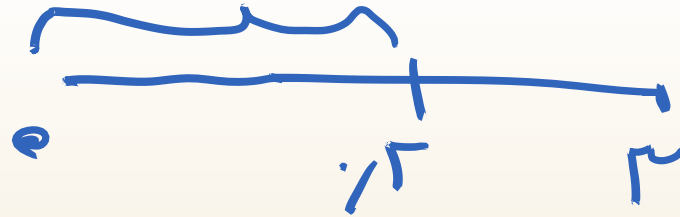
$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2} \quad / \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \quad / \quad \rho_{12} = -1$$

$$\text{Var}(\mu_p) = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 - \frac{1}{2}\sigma^2$$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{4}\sigma^2 - \frac{1}{4}\sigma^2 = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{T}$$



Portfolio Optimization

روش‌های بهینه‌سازی سبد سهام (مقدماتی)

مدرس

علی رئوفی

دکتری اقتصاد مالی- پژوهشگر ارشد
پژوهشکده وزارت اقتصاد و دارایی



$$\mu_p = \sum_{i=1}^n r_i \omega_i = \omega^T r \quad \omega^T = [\omega_1 \dots \omega_n]$$

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

$$\sigma_p^2 = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \text{Cov}(r_1, r_2)$$

$$\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + \omega_3^2 \sigma_3^2 + \dots + \omega_n^2 \sigma_n^2$$

$$+ 2\omega_1 \omega_2 \cdot \text{Cov}(r_1, r_2) + 2\omega_1 \omega_3 \text{Cov}(r_1, r_3)$$

$$+ 2\omega_2 \omega_3 \text{Cov}(r_2, r_3) + \dots$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{Cov}(r_i, r_j)$$

$$w_1 w_1 \underbrace{\text{Cov}(r_1, r_1)}_{\sigma_1^2} = w_1^2 \sigma_1^2$$

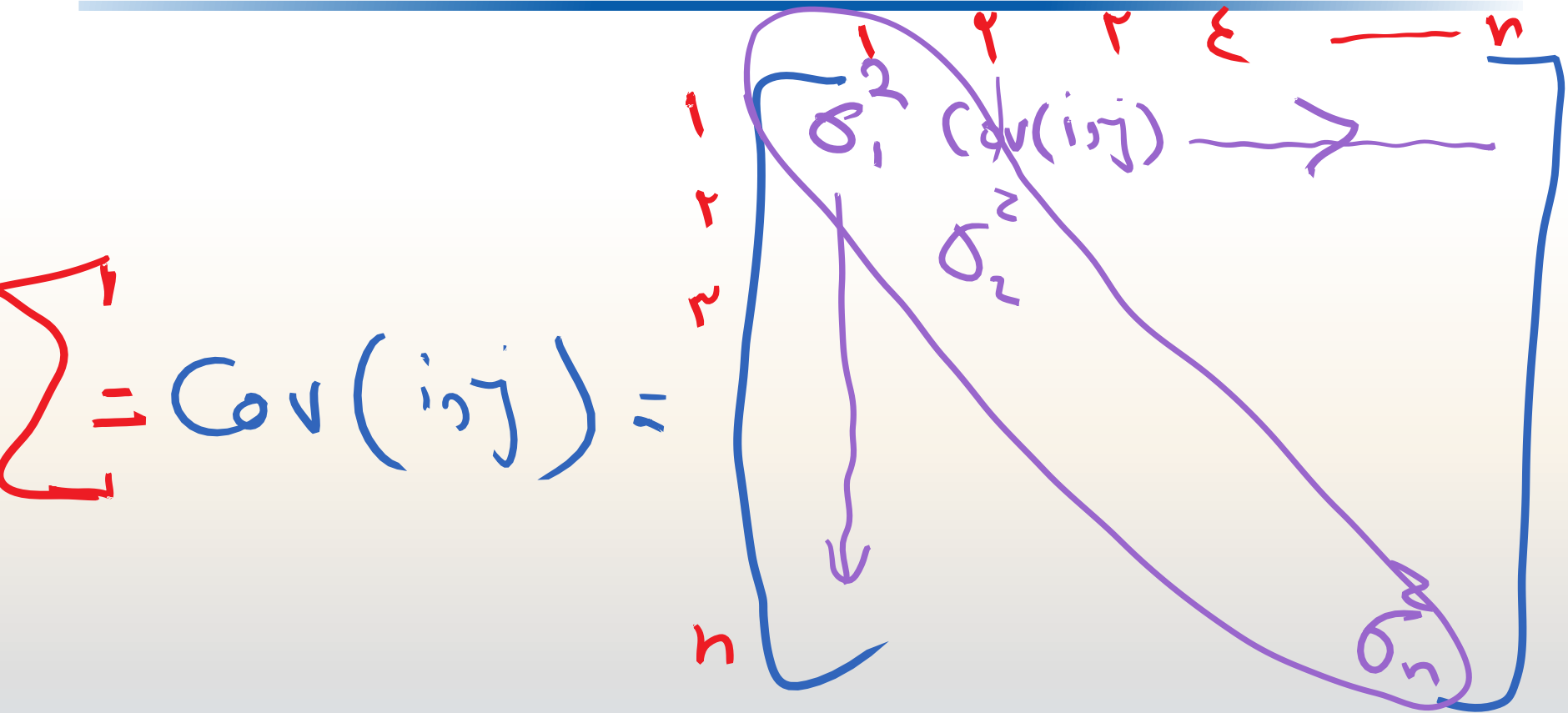
$$w_1 w_2 \text{Cov}(r_1, r_2) + \left. \begin{matrix} i=2 \\ j=1 \end{matrix} \right\}$$

$$w_2 w_1 \text{Cov}(r_2, r_1)$$

$$\vec{\sigma}_P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{Cov}(r_i, r_j)$$

$$\text{Cov}(r_i, r_j) =$$

صنعتی کوواریانس



$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \rho_{ij}$$

$$\sigma_p^2 = \omega^T \Sigma \omega$$

$[1 \times n]$ $[n \times n]$ $[n \times 1]$

$1 \times n$

$$\left[\mu_p = \sum w_i r_i = w^T r \right]_{\max}$$

$$\sigma_p = \sum_i \sum_j w_i w_j \text{Cov}(r_i, r_j) = w^T \Sigma w$$

← هون در کینه سازی سود سرورک پیدا کردن کمتر
 و است به کور که میانگین مالکیت و ریسک به نسبت

سازمان مارکوسینز (mean Variance)

$$\max \quad \mu_p = w^T r$$

بهبود سازی

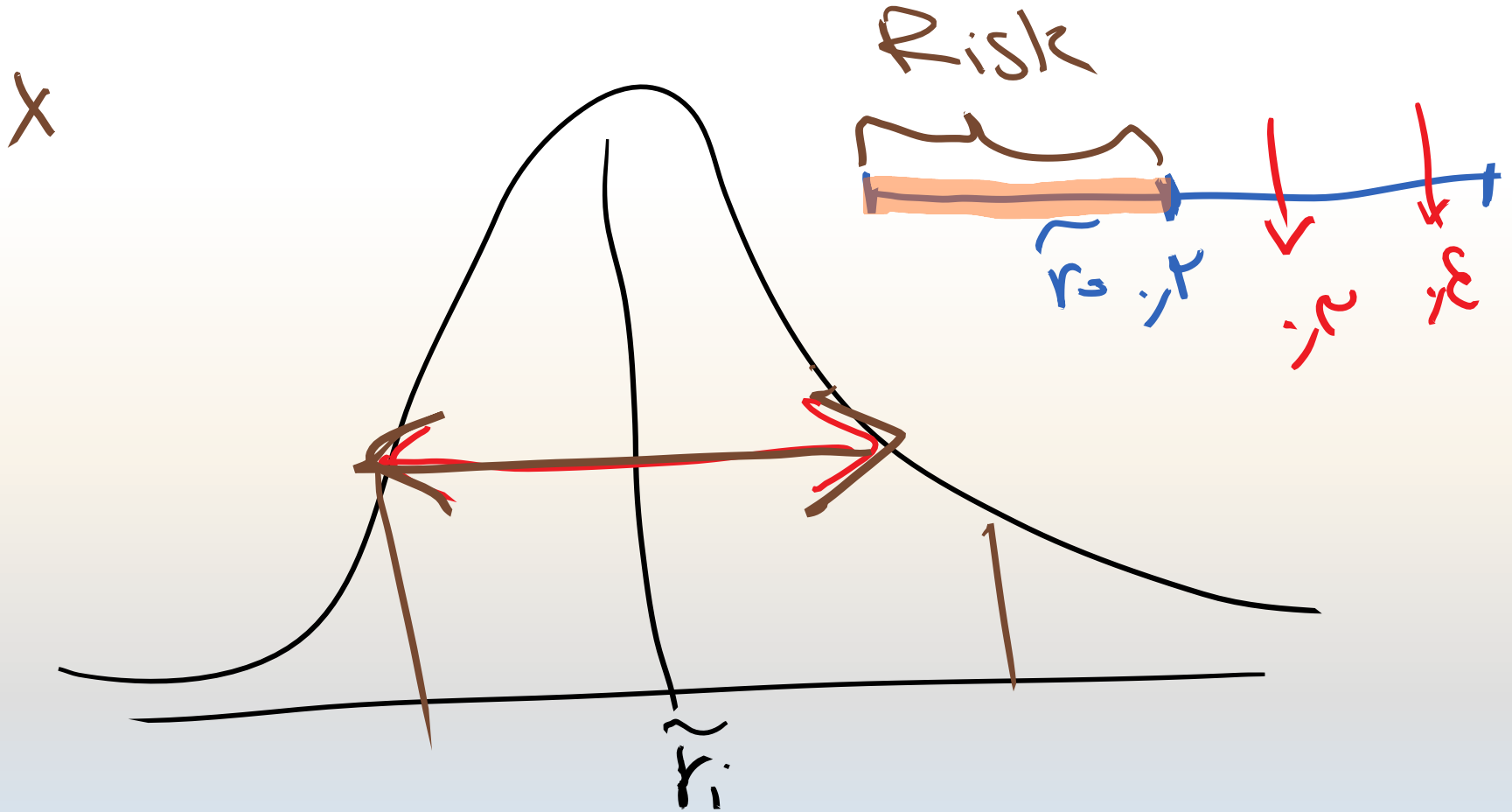
min

$$\sigma_p^2 = w^T \Sigma w$$

رو هدف

s.t:

$$\sum w_i = 1 \quad w_i \geq 0$$



نیم واریانس

$$\sigma_x^2 = \text{var}\{x\} = E\{(x_t - \mu)^2\}$$

$$= \frac{\sum (x - \mu)^2}{T}$$

ت
کامبرسید

Semi-Variance ~ واریانس نیم باز لرز باز لرز

تغییر کند

$$\sigma^2 = E \left\{ (x_t - \mu)^2 \mid x_t < \mu \right\}$$



$$\frac{\sum (X_t - \mu)^2}{T}$$

$$\sigma_{\text{semi}}^2 = \frac{\sum (X_t - \mu)^2 \cdot D_t}{\sum D_t}$$

$$\tilde{r} = 21\%$$

D	r_t
0	25
1	-1
0	2
1	5

$$\sum D = 2$$

Semi Variance

$$\sum_{t=1}^n D_t$$

$$D_t = \begin{cases} 1 & \rightarrow X_t < \mu \\ 0 & \rightarrow X_t > \mu \end{cases}$$

$$\text{Cov}(r_1, r_2) = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12}$$

$$\text{Cov}(r_1, r_2) = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12}$$

mean

Semi-Variance

$$\max : \mu_p = \omega^T r$$

$$\min : \sigma_p^2 = \omega^T \Sigma \omega$$

$$\sum_i = \sigma_i$$

s.t

$$\sum \omega_i = 1$$
$$\omega_i \geq 0$$

Absolute Deviation

$$S = E\{|x_t - \mu|\} = \frac{\sum |x_t - \mu|}{T}$$



$$\rightarrow AD = |2 - 1| = 1$$
$$\sigma^2 = (2 - 1)^2 = 1$$

mean

—

A-D

$$\text{Max: } \mu_p = \omega^T r$$

$$\text{Min } \sigma_p = \sum \omega_i \sigma_i = \omega^T \sigma$$

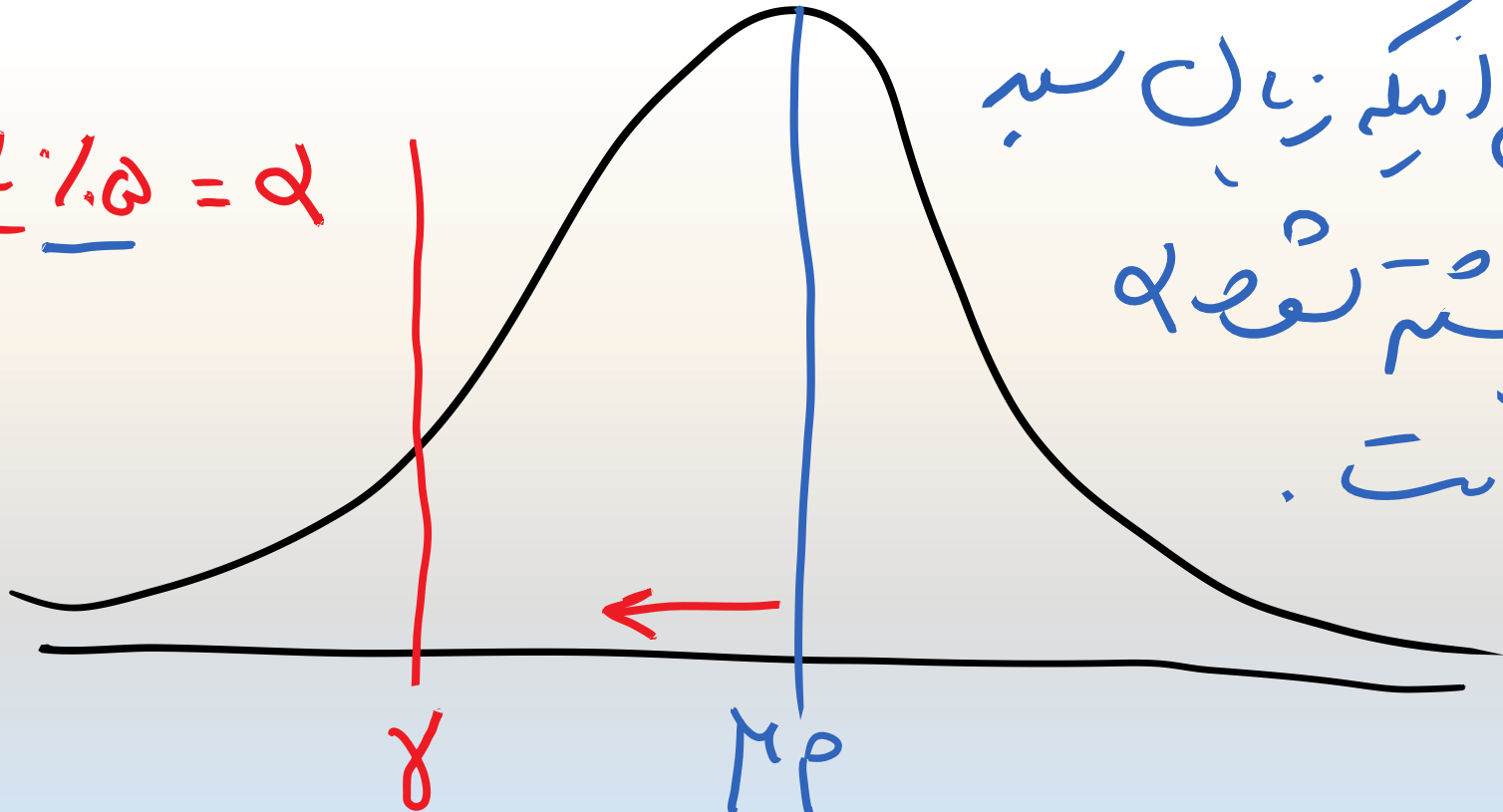
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix}$$

Value at Risk

VaR

ارز در معرض خطر

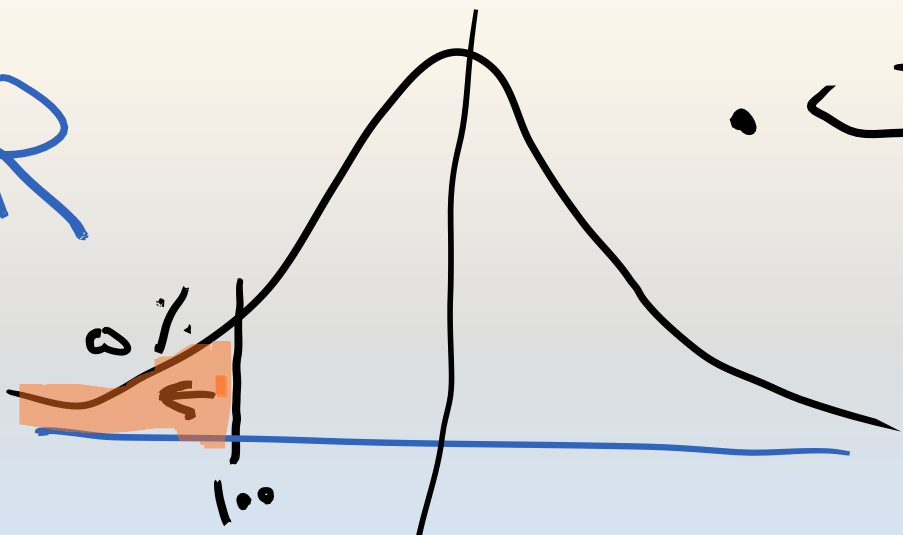
$$\alpha = 1 - 0.5 - 0.1 = 0.4$$



احتمال اینکه زیان به
از دست بدهی
درصد است.

یک شرکت سرمایه‌گذاری اعلام می‌کند که ارزش در معرض
 خطر معاملات آن در بازه هفته، در سطح اهمیت ۹۵ درصد
 ۱-۹

VaR



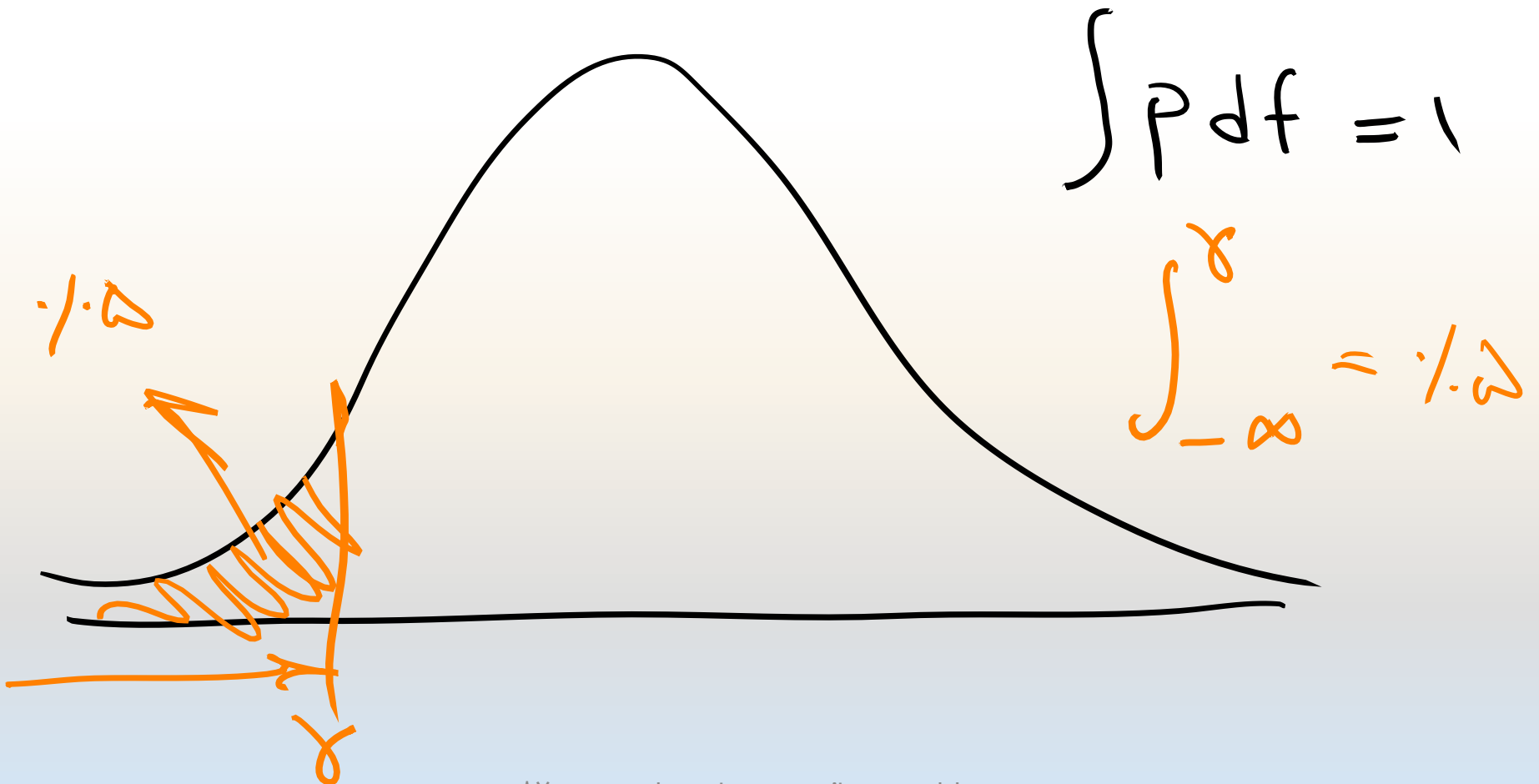
۱۰۰ میلیون تومان است.

۱.۵٪ است ۵٪ = α

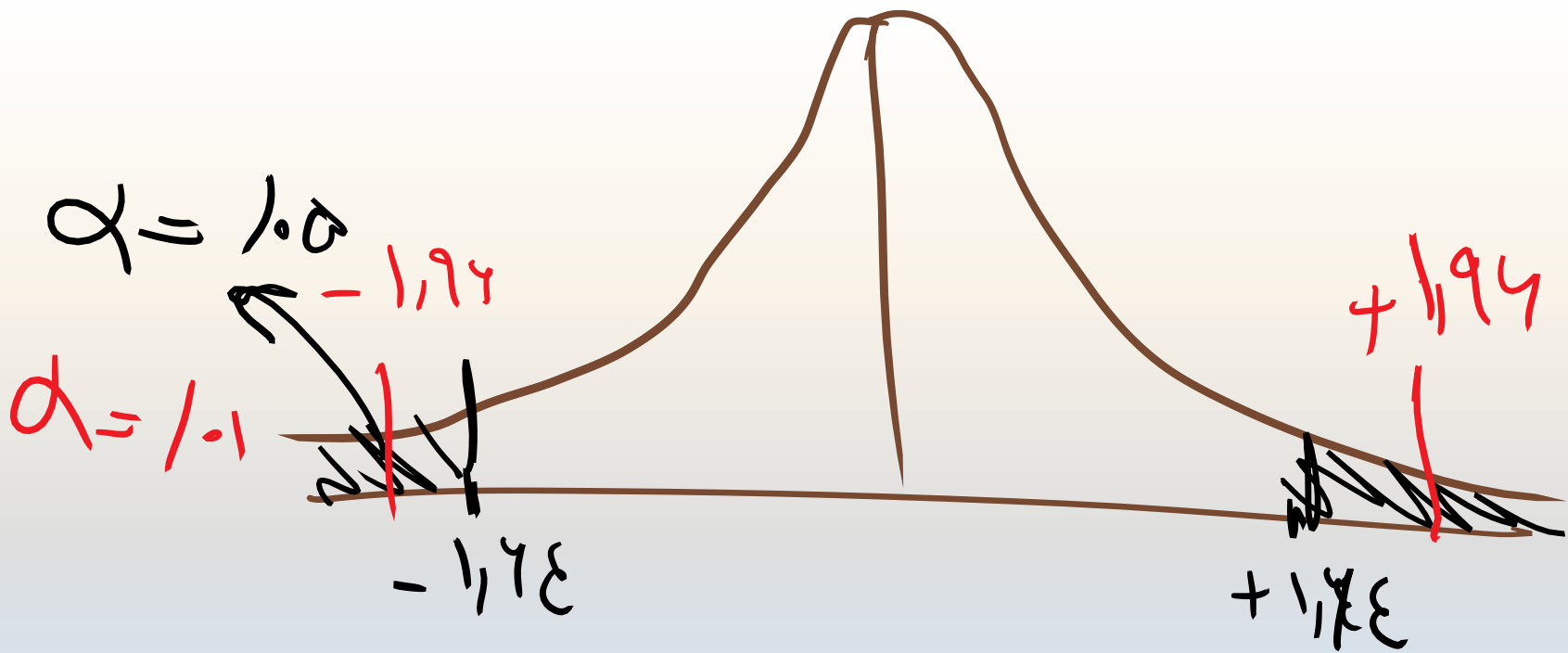
$VaR_{95} = 100$

$$\text{VAR}(\alpha) =$$

$$\min\{\gamma \mid P(-r) \leq \alpha\}$$



Normal - Standard $N \sim (0, 1)$

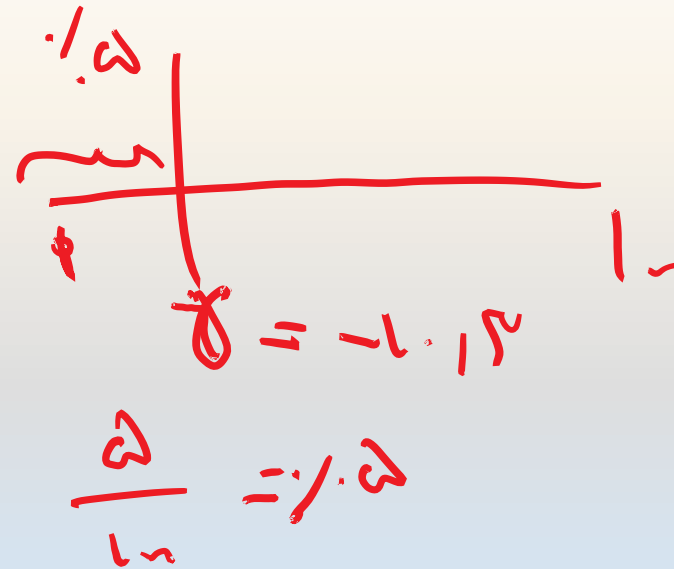


۱	۱، ۵
۲	۲، ۷
۳	۱۰، ۳

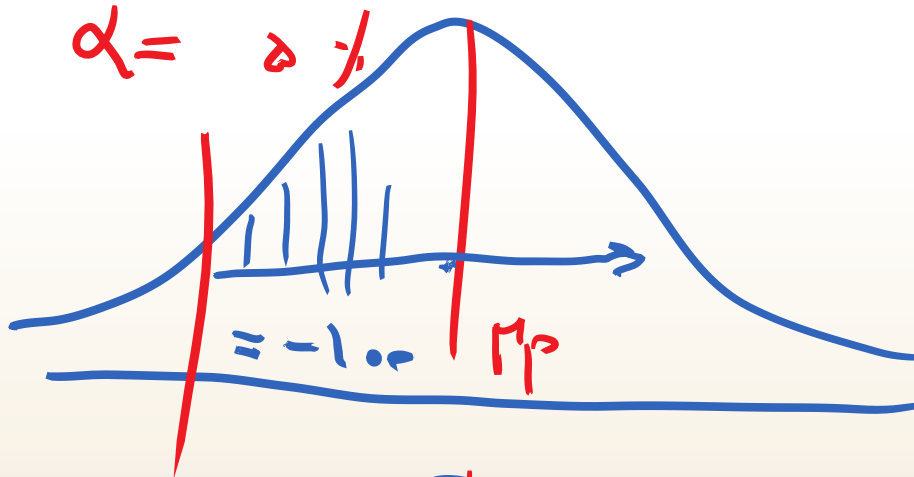
Sort

PL
 L/P

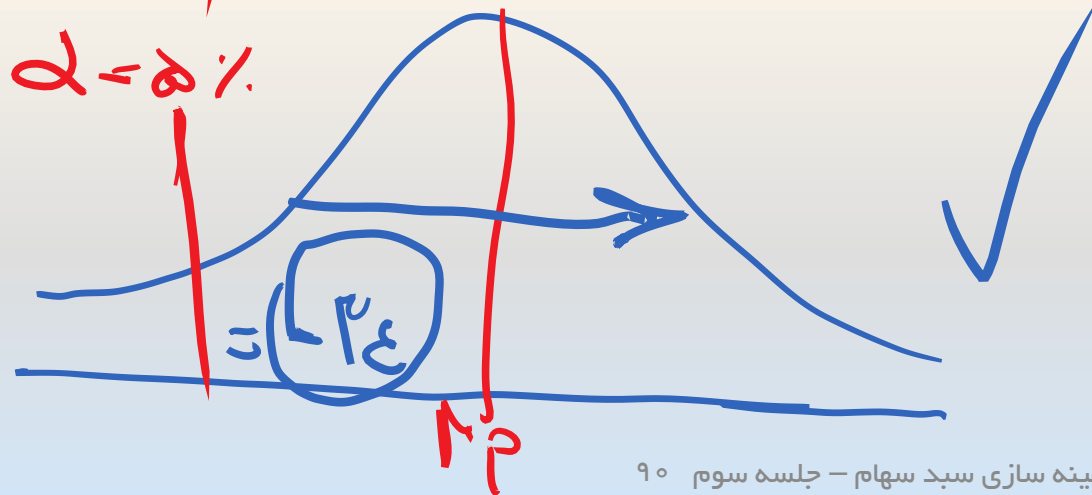
۱	۳، ۲
۲	۱۸، ۴
۳	۱۱، ۳
۴	۱۰، ۳

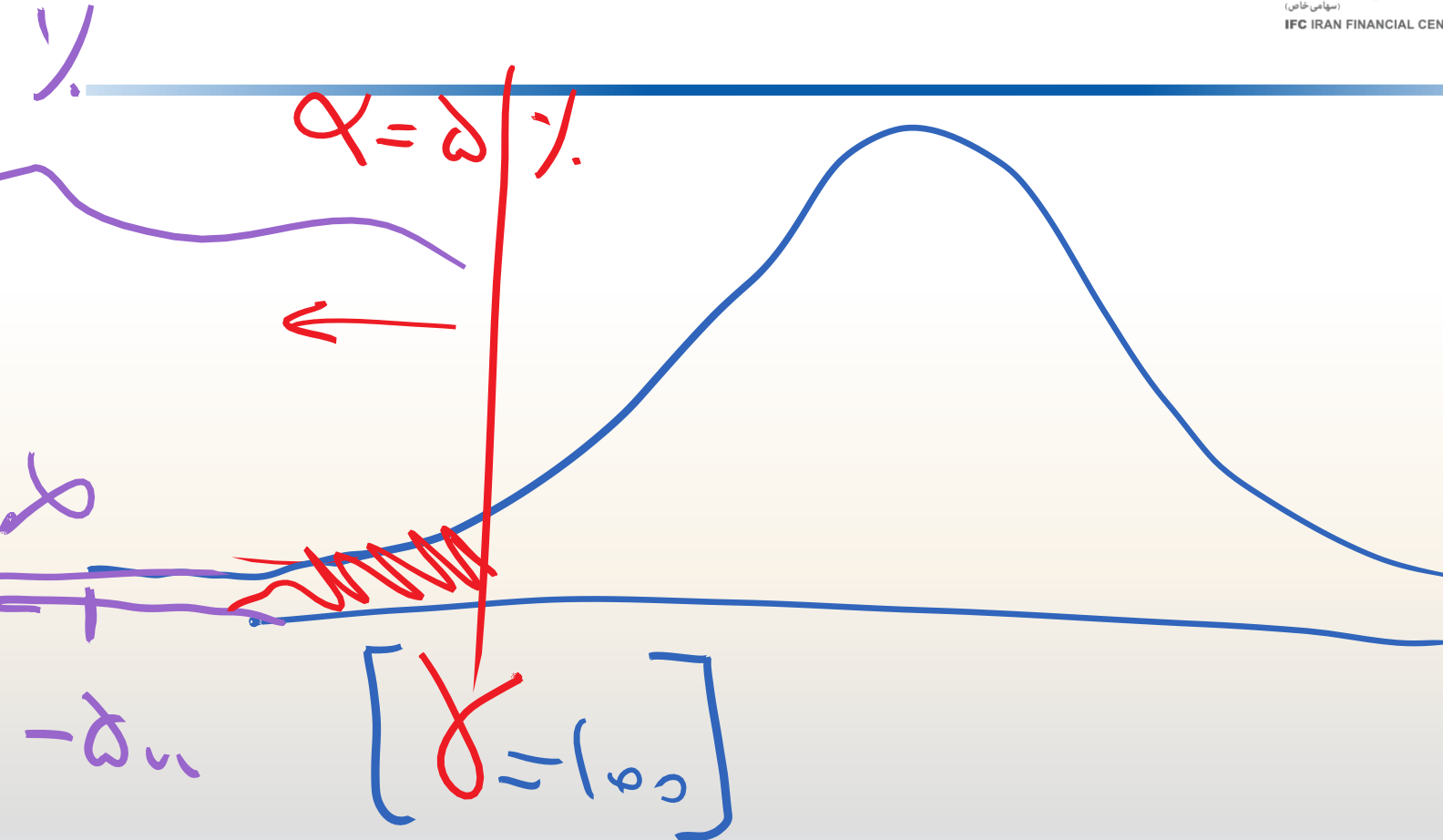


σ

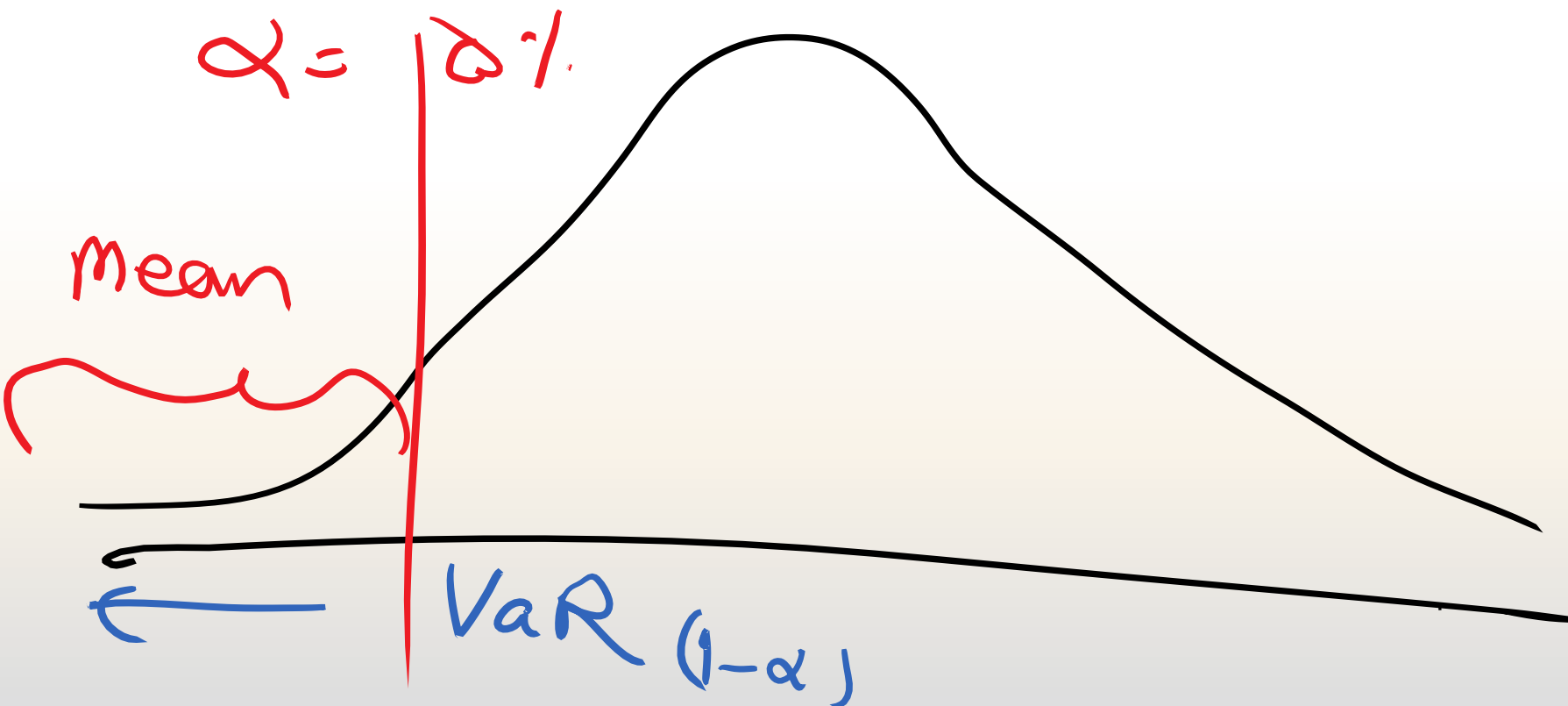


VaR ↓





CVaR



Mean - VaR

$$\text{max: } \mu_P = \omega^T \sigma$$

Min : VaR - Deviation

s.t

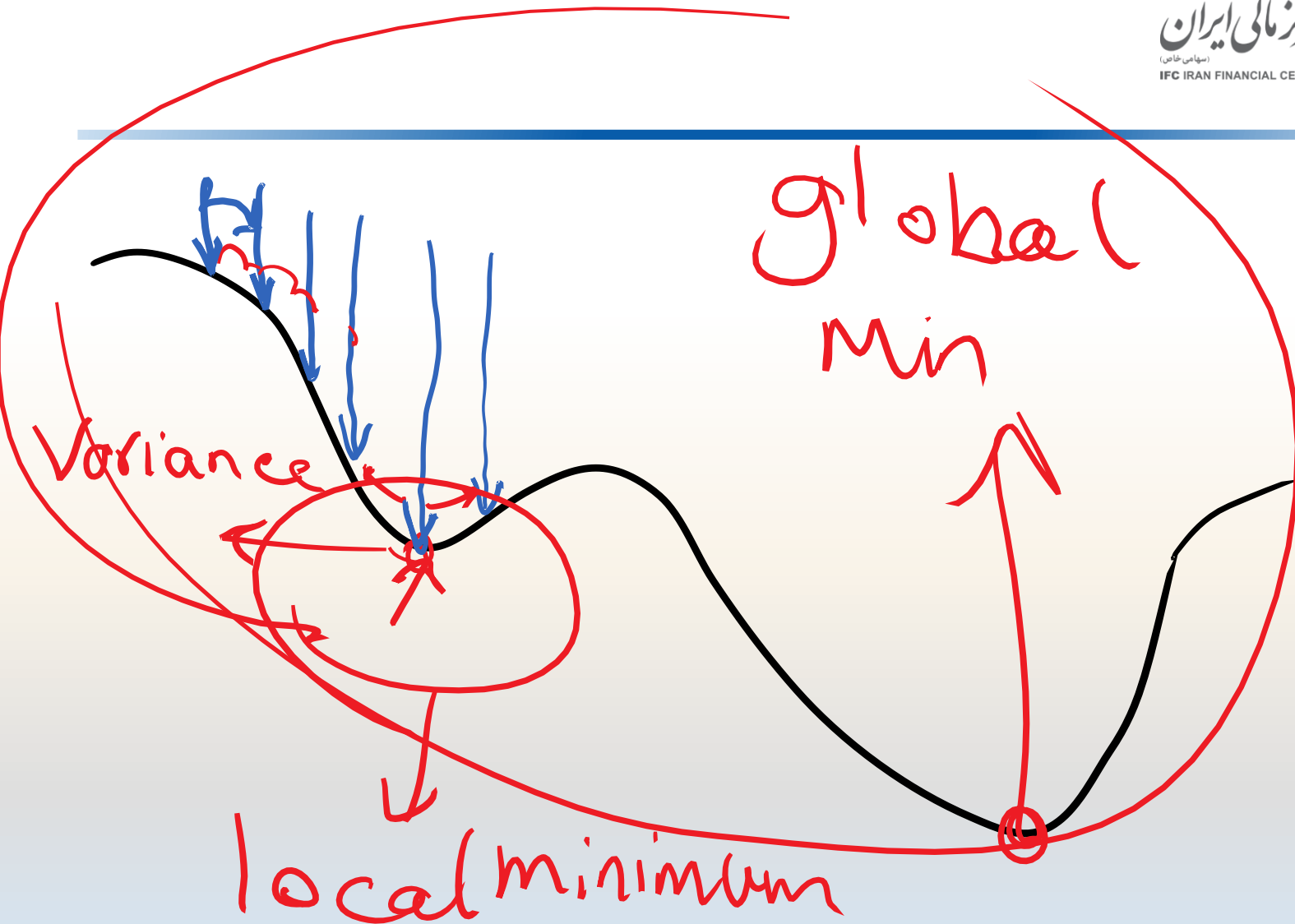
$$\sum w_i = 1 \quad w_i \geq 0$$

mean-CVaR

$$\text{Max: } \mu_p = w^T r$$

Min: CVaR-Deviation

$$\text{S.t } \sum w_i = 1 \quad w_i \geq 0$$



out

۱۰
۱۰

